Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année universitaire 2008-2009

Filière SMI-SM
Section A

Travaux dirigés de Mécanique du Solide
Série-2

Exercice1

Soient $R_0(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$ un repère fixe orthonormé direct et $R_1(O, \vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$ un repère orthonormé direct obtenu à partir de R_0 par une rotation $\vec{\omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{Z_0}$. Un cercle (C) de centre C et de rayon a est astreint de se déplacer sur l'axe $\vec{OX_1}$ tout en restant dans le plan $(\vec{OX_0}, \vec{OY_0})$. On pose $\vec{OI} = r\,\vec{X_1}$ et $(\vec{CX_1}, \widehat{\vec{CP}}) = \varphi$ où I est le point de contact et P un point lié au cercle. On défini le repère orthonormé direct lié au cercle par $R_S(C, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z_0})$ avec $\vec{CP} = a\,\vec{X}$.

Tous les résultats seront exprimés dans la base $(\vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_0})$.

1- On étudie le mouvement de P dans R_0 considéré comme absolu. Si R_1 est le repère relatif, donner les expressions :

a- des vitesses relatives $\vec{v}(P/R_1)$, d'entraînement $\vec{v}(P{\in}R_1/R_0)$ et absolue $\vec{v}(P/R_0)$.

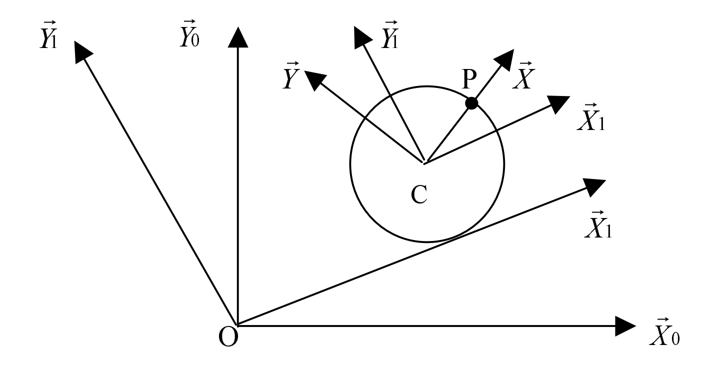
b- Retrouver l'expression de $\vec{v}(P/R_0)$ par la distribution du champ de vitesse dans (C).

c- des accélérations relative $\vec{\gamma}(P/R_1)$, d'entraînement $\vec{\gamma}(P{\in}R_1/R_0)$, complémentaire $\vec{\gamma_c}$ et absolue $\vec{\gamma}(P/R_0)$.

2- Calculer la vitesse de glissement, $\vec{v_g} = \vec{v}(I{\in}C/R_1)$, du cercle (C) sur la droite $\vec{OX_1}$. Evaluer $\vec{v}(I/R_1)$, $\vec{v}(I/R)$ et retrouver $\vec{v_g}$.

Calculer $\vec{v}(I{\in}(C)/R_0)$ et $\vec{v}(I{\in}\,OX_1/R_0)$. En déduire la vitesse de glissement $\vec{v_g}$. Que peut-on conclure ?

3- Donner l'expression du vecteur accélération du point géométrique de contact, $\vec{\gamma}(I{\in}C/R_1)$.

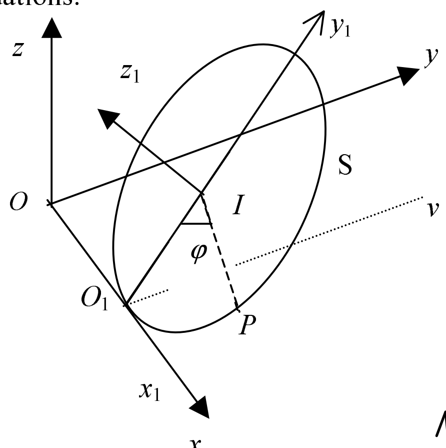


Exercice 2

On considère le repère absolu $R(O,x,y,z)$ par rapport auquel un cerceau de centre I, tel que $\overrightarrow{O_1I} = b\,\vec{e}_{y1}$, est contenu dans le plan $(x_1O_1y_1)$, tourne autour de l'axe Iz_1. Cette rotation est

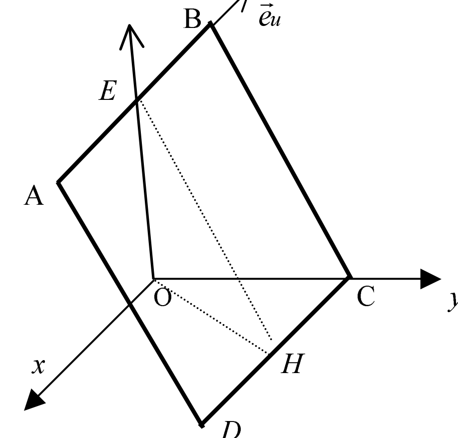
mesurée par l'angle φ tel que si P est un point de S, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{IO_1}, \overrightarrow{IP}})$. R_1 est pris comme repère relatif.

1- Donner l'expression de $\vec{\omega}(S/R)$ dans la base de R_1.
2- Calculer dans R_1 les composantes de :
   a- $\vec{v}(P/R_1)$ par dérivation cinématique du vecteur $\overrightarrow{O_1P}$.
   b- $\vec{v}(P/R_1)$ par la loi de distribution des vecteurs vitesses dans le solide S.
   c- le vecteur vitesse d'entraînement de P.
   d- $\vec{v}(P/R)$
3- a- Examiner le cas particulier où P est le point P_0 du cerceau au contact en O_1 avec l'axe Ox.
   b- Quelle est la condition de non glissement sur cet axe ? Interpréter le résultat obtenu.
4- Utiliser la loi de composition des vecteurs accélération pour trouver les composantes dans R_1 du vecteur accélération absolue $\vec{\gamma}(P/R)$ du point P.
5- On suppose que l'axe Ox_1 fait un angle ψ , variable, avec l'axe Ox du repère absolu.
   a- Donner la vitesse de glissement de S sur le plan xOy.
   b- En déduire la condition de roulement et pivotement sans glissement. Quelle est la nature de ces équations.



Exercice 3

On considère le repère absolu $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par rapport auquel une plaque rigide S carrée de côté $2a$, est astreinte à se déplacer de telle sorte que :
- l'un de ces côté CD, soit dans le plan (xOy).
- le milieu E du côté AB, parallèle à CD, soit sur l'axe Oz.



A un instant donné, on repère la position de la plaque par les angles $\psi = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}})$ (H : milieu de DC) et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HE}})$. R est le repère de projection, $\vec{e}_u$ le vecteur unitaire de la direction de $A\,B$.

I- 1- Déterminer :

a) le vecteur rotation de S par rapport à R : $\vec{\omega}(S/R)$;

b) le vecteur vitesse de E par rapport à R : $\vec{v}(E/R)$;

2- Soit $P(x,y,z)$ un point du plan(Hoz) mécaniquement lié à S(point du solide prolongé de S).

a) trouver la relation qui lie x, y et ψ.

b) calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(P/R)$ de P en fonction de x, z, ainsi que de ψ, θ et de leurs dérivées.

II- 1- On étudie le mouvement de S tel que θ = cste $\forall$ t. Quelle est la nature du mouvement de S ? Préciser l'axe de rotation de S.

2- On étudie maintenant le mouvement de S tel que ψ = cste $\forall$ t.

a) Préciser la direction de l'axe de rotation Δ.

b) Donner l'expression de $\vec{v}(P/R)$ si $P(x,y,z) \in (HOz)$.

c) En déduire la position de $P_0(X_0,Y_0,Z_0)$, trace de Δ dans le plan (HOz). Définir complètement Δ.

d) Montrer que la position de P_0 peut être déterminée directement par des considérations cinématiques simples sur le mouvement de rotation à l'instant considéré.

e) Préciser quel est le vecteur vitesse de P_0 et par suite celui de tout autre point de l'axe de rotation.

Exercice 4

On considère deux tiges (S_1) et (S_2), homogènes, rectilignes, articulées en A, en mouvement par rapport au repère absolu $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

I- Le solide (S_1) est constitué d'une tige OA rigide de longueur a tournant autour de l'axe Ox et restant dans le plan (yOz). L'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OA}})$ varie en fonction du temps.

Le solide (S_2) est constitué d'une tige AB rigide de longueur b dont l'extrémité B glisse sans frottement sur l'axe Oy (fig. 1). On suppose que $b>a$ et $\pi/2 \le \beta \le \pi$. L'angle $\beta = (\widehat{\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{BA}})$ est une fonction du temps.

1- Etablir la relation entre β et α.

2- Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}(S_2/R)$ en fonction de α et $\overset{\circ}{\alpha}$. En déduire l'expression de $\overset{\circ}{\beta}$ en fonction de α et $\overset{\circ}{\alpha}$.

3- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(A/R)$ .En déduire la vitesse $\vec{v}(B/R)$ du point B.

4- Soit $P(x,y,0)$ un point du solide prolongé de S_2.

a) Calculer $\vec{v}(P/R)$.

b) Calculer les coordonnées du point P qui a une vitesse instantanée nulle.

c) Quelle est la nature du mouvement ? Déterminer le centre instantané de rotation

II- On suppose que le système ($S_1 \cup S_2$) se déplace dans le plan vertical (zOu) du repère relatif $R'(O, \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z)$ obtenu à partir du repère absolu R par une rotation d'angle ψ autour de Oz (fig. 2). Les angles α et β sont alors définis par $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{OA}})$, $\beta = (\widehat{\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{BA}})$ et l'extrémité B de S_2 glisse sans frottement sur l'axe Ou.

1- Paramétrer les positions respectives des systèmes S_1 et S_2.

2- Déterminer en fonction de $\alpha, \overset{\circ}{\alpha}$ et $\overset{\circ}{\psi}$ le torseur cinématique de S_1 au point A par rapport à R. En déduire le torseur cinématique de S_2 par rapport à R au point C, centre de gravité de la tige AB.

3- Montrer que la vitesse de glissement de la tige AB sur l'axe Ou s'écrit :

$$\vec{v}_g(S_2/R) = a\overset{\circ}{\alpha}\sin\alpha\,(1+f(\alpha))\,\vec{e}_u$$

$f(\alpha)$ est une fonction de α que l'on déterminera.

